УДК 514.75

*М. В. Кретов*

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ЭЛЛИПСОИДОВ

*Рассмотрено трехпараметрическое семейство эллипсоидов в трехмерном аффинном пространстве со специальными геометрическими свойствами. Построена геометрическая модель этого многообразия.*

*A three-parametrical family of ellipsoids in three-dimensional affine space with special geometric properties is considered. A geometrical model of this manifold is constructed.*

**Ключевые слова:** комплекс, эллипсоид, характеристическая точка, фокальное многообразие, аффинное пространство, асимптотическая линия, репер, цилиндрическая поверхность, трехпараметрическое семейство.

**Ключевые слова:** complex, ellipsoid, characteristic point, focal manifold, affine space, asymptotic line, frame, cylindrical surface, three-parametrical family.

Продолжается исследование трехпараметрических семейств (комплексов) эллипсоидов в трехмерном аффинном пространстве, рассмотренных в работе [1].

Исследование проводится в каноническом репере $R = \{A,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$, где $A$ — центр эллипсоида $q$; векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, а концы их $A_i$, $i, j, k = 1, 2, 3$ лежат на эллипсоиде. Деривационные формулы репера $R$ запишутся в виде

$$dA = \omega^i \mathbf{e}_i\,,\ d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_i\,,$$

причем формы Пфаффа $\omega^i, \omega_i^j$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i\,,\ D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Уравнение эллипсоида $q$ запишется в виде

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0.$$



*Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2014. Вып. 4. С. 163 – 167.*

В работе [1] изучены комплексы $K_3^0$, в которых на эллипсоиде $q$ имеются по крайней мере три характеристические точки [2] $A_i$, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, если прямая, проходящая через центр и одну из точек $A_i$, описывает цилиндрическую поверхность.

В настоящей работе исследуются трехпараметрические семейства (комплексы) $\bar{K}_3$ эллипсоидов — подклассы многообразия $K_3^0$, когда асимптотические линии на поверхности $(A_1)$ являются координатными и при движении точки $A$ по поверхности касательная на индикатрисе вектора $\mathbf{e}_2$ параллельна плоскости $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Система уравнений Пфаффа комплекса $K_3^0$ имеет следующий вид [1]:

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3,\ \omega_1^3 = 0,\ \omega_3^1 = \beta\omega^2 + \gamma\omega^3, \\ \omega_2^3 = \lambda\omega_3^2 - \omega^3,\ \omega_3^2 = (\lambda b - 1)\omega^2 + b\omega^3. \tag{1}$$

Для этого многообразия имеют место формулы

$$\begin{aligned} &d\mathbf{e}_1 = -\omega^1\mathbf{e}_1,\ d\mathbf{e}_2 = (\alpha\omega^2 + \beta\omega^3)\mathbf{e}_1 - \omega^2\mathbf{e}_2 + (\lambda b - 1)(\lambda\omega^2 + \omega^3)\mathbf{e}_3, \\ &d\mathbf{e}_3 = (\beta\omega^2 + \gamma\omega^3)\mathbf{e}_1 + ((\lambda b - 1)\omega^2 + b\omega^3)\mathbf{e}_2 - \omega^3\mathbf{e}_3, \\ &dA_1 = \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\mathbf{e}_3,\ dA_2 = (\omega^1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3)\mathbf{e}_1 + \lambda\omega_3^2\mathbf{e}_3, \\ &dA_3 = (\omega^1 + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3)\mathbf{e}_1 + b(\lambda\omega^2 + \omega^3)\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через $l_1$ и $l_2$ асимптотические линии на поверхности $(A_1)$, ассоциированной с $\bar{K}_3$, задаваемые уравнениями $\omega^2 = 0$ и $\omega^3 = 0$ соответственно.

**Теорема 1.** *Комплексы $\bar{K}_3$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.*

*Доказательство.* Используя формулы (2), находим асимптотические линии на поверхности $(A_1)$, ассоциированной с комплексом $K_3^0$:

$$\alpha(\omega^2)^2 + 2\beta\omega^2\omega^3 + \gamma(\omega^3)^2 = 0.$$

Из определения $\bar{K}_3$ следует, что $\alpha = \gamma = 0$. Тогда в системе (1) $\omega_2^1 = \beta\omega^3$, $\omega_3^1 = \beta\omega^2$. Замыкая эти уравнения, получим $d\ln\beta = B\omega^3 + \omega^1 + \omega^2 - 2\lambda b\omega^2$, где $B = 1 - 2\lambda b$. Из формул (2) и определения комплекса $\bar{K}_3$ следует $\lambda = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений Пфаффа $\bar{K}_3$ примет вид

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0,\ \omega_2^1 = \beta\omega^3,\ \omega_3^1 = \beta\omega^2,\ \omega_2^3 = -\omega^3, \\ \omega_3^2 = -\omega^2 + b\omega^3,\ d\ln\beta = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3. \tag{3}$$

Чистое замыкание [3] этой системы состоит из одного уравнения

$$db \wedge \omega^3 - 2b\omega^2 \wedge \omega^3 = 0. \tag{4}$$

Система (3)—(4) в инволюции и ее решение определяется с произволом одной функции одного аргумента. □

**Теорема 2.** *Комплексы эллипсоидов $\bar{K}_3$ имеют геометрические свойства:*

*1) прямая $L = (A_2, \mathbf{e}_1)$ неподвижна;*

*2) при движении точки $A_1$ вдоль асимптотической линии $l_2$ прямая $m = (A_1, \mathbf{e}_2)$ и координатная плоскость $(A, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ неподвижны, а векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ смещаются параллельно сами себе;*

*3) на поверхности $(A_1)$ направление $\omega^2 + \omega^3 = 0$ сопряжено направлению $\omega^2 - \omega^3 = 0$;*

*4) поверхность* ($A_3$) *– цилиндрическая с образующей, параллельной прямой L, причем касательная к этой поверхности в точке* $A_3$ *параллельна координатной плоскости* ($A$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$)*;*

*5) точка* $P = A_2 - \beta\mathbf{e}_1$ *неподвижна при движении точки* $A_1$ *по асимптотической линии* $l_1$ *при* $\omega^1 = 0$*;*

*6) смещение точки* $A_3$ *при переходе с одной образующей цилиндрической поверхности* ($A_3$) *на другую происходит в направлении вектора* $\mathbf{e}_2$.

*Доказательство.* 1) Имеем

$$d\mathbf{e}_1 = -\omega^1\mathbf{e}_1,\ d\mathbf{e}_2 = \beta\omega^3\mathbf{e}_1 - \omega^2\mathbf{e}_2 - \omega^3\mathbf{e}_3,\ d\mathbf{e}_3 = \beta\omega^2\mathbf{e}_1 + (-\omega^2 + b\omega^3)\mathbf{e}_2 - \omega^3\mathbf{e}_3. \quad (5)$$

Пусть $M_1 = A_2 + X^1\mathbf{e}_1$ — текущая точка прямой $L = (A_2, \mathbf{e}_1)$. Тогда



$$dM_1 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \beta\omega^3)\mathbf{e}_1.$$

2) Пусть $M_2 = A_1 + X^2\mathbf{e}_2$ и $M_3 = A + X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2$ — текущие точки соответственно прямой $m = (A_1, \mathbf{e}_2)$ и координатной плоскости ($A$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$). Тогда, используя формулы (5), получаем

$$dM_2 = \beta X^2\omega^3\mathbf{e}_1 + (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\mathbf{e}_2 + (1 - X^2)\omega^3\mathbf{e}_3,$$
$$dM_3 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \beta X^2\omega^2)\mathbf{e}_1 + (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\mathbf{e}_2 + (1 - X^2)\omega^3\mathbf{e}_3.$$

При движении точки $A_1$ вдоль асимптотической линии $l_2$ эти формулы принимают следующий вид:

$$dM_2 = (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\mathbf{e}_2,\ dM_3 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \beta X^2\omega^2)\mathbf{e}_1 + (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\mathbf{e}_2,$$

откуда следует неподвижность прямой $m$ при движении точки $A_1$ вдоль асимптотической линии $l_2$.

Из формул (5) непосредственно вытекает, что в этом случае векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ смещаются параллельно сами себе.

3) Из определения многообразия $\bar{K}_3$ следует, что асимптотические линии поверхности ($A_1$) задаются уравнением $\omega^2\omega^3 = 0$, которое равносильно $(\omega^2 + \omega^3)^2 - (\omega^2 - \omega^3)^2 = 0$, откуда ясно, что направление $\omega^2 + \omega^3 = 0$ сопряжено направлению $\omega^2 - \omega^3 = 0$.

4) Имеем $dA_3 = (\omega^1 + \beta\omega^2)\mathbf{e}_1 + b\omega^3\mathbf{e}_2$. Уравнение асимптотических линий поверхности ($A_2$) принимает вид $(\omega^3)^2 = 0$. Из этих формул следует, что поверхность ($A_3$) — цилиндрическая с образующей, параллельной прямой $L$, а касательная к этой поверхности в точке $A_3$ параллельна координатной плоскости ($A$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$).

5) Из формул (5) и (3) получаем $dP = (\omega^1 - \beta\omega^2)\mathbf{e}_1$, откуда и следует соответствующее утверждение теоремы.

6) Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из формулы $dA_3 = (\omega^1 + \beta\omega^2)\mathbf{e}_1 + b\omega^3\mathbf{e}_2$. □

**Теорема 3.** *Фокальное многообразие [2] эллипсоида q, ассоциированного с комплексом* $\bar{K}_3$*, состоит только из трех точек* $A_1$, $A_2$ *и* $A_3$.

*Доказательство.* Фокальное многообразие эллипсоида $q$, ассоциированного с комплексом $\bar{K}_3$, задается следующей системой уравнений:

$$(X^1)^2 - X^1 = 0,\ (X^2)^2 - X^2 - \beta X^1X^3 + X^2X^3 = 0,$$
$$(X^3)^2 - X^3 - \beta X^1X^2 + (1 - b)X^2X^3 = 0,\ (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - 1 = 0.$$

Эта система уравнений имеет четыре решения, два из которых совпадают. Этой системе удовлетворяют координаты точек $A_1$, $A_2$ и $A_3$, причем последняя точка является двукратной [4] фокальной точкой. □

Приведенные в теореме 2 свойства позволяют построить геометрическую модель многообразия $\overline{K}_3$, то есть дать его безынтегральное представление [5]. Для того чтобы построить комплекс эллипсоидов $\overline{K}_3$, необходимо задать в трехмерном аффинном пространстве следующие геометрические образы:

1) произвольную прямую $L$;

2) произвольные точки $E$ и $D$ на прямой $L$;



3) произвольную цилиндрическую поверхность $\sigma$ с образующей, параллельной прямой $L$.

Для выбора цилиндрической поверхности сначала задаем плоскость, а на ней выбираем направляющую цилиндрической поверхности.

Проведем следующие построения:

1) на цилиндрической поверхности $\sigma$ выбираем произвольную точку $A_3$, в которой проведем касательную плоскость $\pi_1$ к поверхности $\sigma$;

2) через прямую $L$ проводим плоскость $\pi_2$, параллельную плоскости $\pi_1$;

3) проводим в плоскости $\pi_2$ через точку $E$ прямую $m$;

4) в плоскости $\pi_2$ выбираем точку $A$, не инцидентную прямым $L$ и $m$. В пересечении с прямыми $m$ и $L$ получим соответственно точки $A_1$ и $A_2$.

Эллипсоид $q$ с центром в точке $A$, ассоциированный с комплексом $\overline{K}_3$, определяют инцидентные ему точки $A_1$, $A_2$ и $A_3$, касательные прямые $L$ и $m$ и касательная плоскость $\pi_1$.

При движении точки $A$ в плоскости $\pi_2$ получается двухпараметрическое семейство эллипсоидов $q$. При этом векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ смещаются параллельно себе. Точка $A_3$ смещается по образующей цилиндрической поверхности таким же образом, как точка $D$ по прямой $L$, а при переходе с одной образующей цилиндрической поверхности на другую точка $A_3$ смещается на величину, равную сумме смещения точки $A_2$ и величины, пропорциональной смещению точки $A_1$ с коэффициентом, равным расстоянию от точки $D$ до точки $A_2$.

При вращении плоскости $\pi_2$ вокруг прямой $L$ получается трехпараметрическое семейство эллипсоидов $q$, которое назовем комплексом $\widehat{K}_3$.

Докажем, что всякий комплекс $\widehat{K}_3$ является комплексом $\overline{K}_3$, и, наоборот, всякий комплекс $\overline{K}_3$ — это комплекс $\widehat{K}_3$ Для этого отнесем комплекс $\hat{K}_3$ к реперу $\{A, \mathbf{e}_i\}$, начало которого выбрано произвольно на плоскости $\pi_2$, векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ сопряжены и параллельны соответственно прямым $L$ и $m$, а вектор $\mathbf{e}_3$ сопряжен векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, и конец его лежит на цилиндрической поверхности $\sigma$.

Прямая $L$ задана уравнениями $X^3 = 0$, $X^2 = 1$. Из условия неподвижности этой прямой следует, что $\omega_1^3 = 0, \omega_2^3 = -\omega^3, \omega_1^2 = 0, \omega_2^2 = -\omega^2$. Касательная плоскость $\pi_1$ параллельна векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, поэтому $\omega_3^3 = -\omega^3$. Замыкая последнее уравнение, получим $\omega_3^2 = -\omega^2 + b\omega^3$.

Прямая $m$ определяется уравнениями $X^3 = 0$, $X^1 = 1$. Так как эта прямая неподвижна при движении точки $A_1$ вдоль асимптотической линии $l_2$, то $\omega_1^1 = -\omega^1$, $\omega_2^1 = k\omega^3$. Замыкая последнее уравнение, находим, что $\omega_3^1 = k\omega^2 + \gamma\omega^3$, $dk = k\omega^1 + k\omega^2 + \tau\omega^3$.

Пусть точка $D = A_2 + \beta\mathbf{e}_1$, тогда $dD = (d\beta + (1-\beta)\omega^1 + k\omega^3)\mathbf{e}_1$. Точка $A_3$ смещается по образующей цилиндрической поверхности $\sigma$ таким же образом, как точка $D$ по прямой $L$, поэтому $d\beta = \beta\omega^1 + k\omega^2 + \tau\omega^3$. По построению точка $D$ смещается на величину, равную сумме смещения точки $A_2$ и величине, пропорциональной смещению точки $A_1$ с коэффициентом, равным расстоянию от точки $D$ до точки $A_2$. Значит, $dD\big|_{\omega^3=0} = (|dA_2|) + \beta|dA_1|)\mathbf{e}_1$, откуда $d\beta = \beta\omega^1 + \beta\omega^2 + \mu\omega^3$.

Из двух формул для $d\beta$ следует, что $\omega_3^1 = \beta\omega^2 + (\mu - \tau)\omega^3$. Сравнивая последнюю формулу с формулой $\omega_3^1 = k\omega^2 + \gamma\omega^3$, получаем $k = \beta$.

Таким образом, $\omega_2^1 = \beta\omega^3$, $\omega_3^1 = \beta\omega^2 + \gamma\omega^3$, $d\beta = \beta\omega^1 + \beta\omega^2 + \tau\omega^3$. Отсюда и из уравнения $d\beta = \beta\omega^1 + \beta\omega^2 + \mu\omega^3$ вытекает, что $\mu = \tau$, а значит, $\omega_3^1 = \beta\omega^2$.

Используя 5-е утверждение теоремы 2, получаем $\tau = \beta$.

Следовательно, система уравнений Пфаффа комплекса $\hat{K}_3$ имеет следующий вид:

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0,\ \omega_2^1 = \beta\omega^3,\ \omega_3^1 = \beta\omega^2,\ \omega_2^3 = -\omega^3,$$
$$\omega_3^2 = -\omega^2 + b\omega^3,\ d\ln\beta = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3,$$

то есть системы уравнений Пфаффа комплексов $\hat{K}_3$ и $\bar{K}_3$ совпадают, а значит, геометрическая модель многообразия $\bar{K}_3$ построена правильно.

## Список литературы


1. *Кретов М. В.* Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1979. Вып. 11. С. 41—47.

2. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в $n$-мерном проективном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Т. 6. С. 113—133.

3. *Малаховский В. С.* Некоторые проблемы дифференциальной геометрии многообразий фигур // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 64—84.

4. *Малаховский В. С.* Индуцировано оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве // Труды геометрического семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Т. 6. С. 319—334.

5. *Кованцов Н. И.* Безынтегральное представление некоторых специальных классов комплексов // Математический сборник. М., 1956. Т. 38, №1. С. 107—128.


## Об авторе


Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: kretov1@mail.ru


## About the author


Dr Michail Kretov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: kretov1@mail.ru